Recenzja książki *Teoria Mnogości*, autorstwa pp. Aleksandra Błaszczyka i Sławomira Turka Wydawnictwo Naukowe PWN, ISBN 978-83-01-15232-1

V. Wiktor Marek

1920

Nie jest łatwo recenzować książkę która dotyczy dziedziny którą się kiedyś aktywnie uprawiało. Jeszcze trudniej kiedy po 30 latach czyta się tekst blisko powiązany z dwiema książkami które były niejako klasyką dziedziny, (przynajmniej w języku polskim) mianowicie "Teorią Mnogości" Kuratowskiego i Mostowskiego[1] oraz "Podstawy Teorii Mnogości" Guzickiego i Zbierskiego, moich kolegów i współautorów. Z czterech autorów tych książek trzej nie żyją. Ich książki (obie ukazały się w roku 1978) napewno są wyczerpane. U"ywać będę skrótu "KM" kiedy będę porównywać zawartość recenzowanej książki z monografią Kuratowskiego i Mostowskiego.Porównam też recenzowaną książkę tylko z KM.

Od razu na wstępie wspomnę że recenzowana książka jest nowoczesna i zawiera wiele wyników tak klasycznych (t.j. takich które mogły by być zamieszczone w KM) jak i uzyskanych po r. 1978. Dowody są napisane bardzo troskliwie a korekta zrobiona bardzo solidnie. Punkt widzenia autorów jest silnie motywowany przez zastosowania topologiczne i autorzy poświęcają wiele miejsca zagadnieniom związanych z topologią ogólną (nawiązując w ten sposób do klasycznej *Topology* Kuratowskiego i *Topologii Ogólnej* Engelkinga.

Teoria Mnogości ma w Polsce wielkie tradycje – szereg wielkich nazwisk występujących w "nazwanych" twierdzeniach to Polacy: Sierpiński, Kuratowski, Tarski, Ulam, Lindenbaum, Banach, i inni. Ich dorobek jest często cytowany w recenzowanej książce.

Teoria mnogości ma dwa nurty. Jeden jest motywowany zastosowaniami w klasycznej matematyce (topologii, analizie funkcjonalnej, do pewnego stopnia także w algebrze). To jest punkt widzenia reprezentowany w recenzowanej książce. Można y nawet rzec że teoria mnogości została stworzona by dać matematykom swobodę w operowaniu takimi pojęciami jak relacja, funkcja, równoliczność czy porządek. Dzięki teorii mnogości nie

[1]Byłem pierwszym czytelnikiem drugiego, trzeciego i czwartego wydania tej monografii.

musimy się zastanawiać czym jest, na przykład grupa. Pojęcie to (jak i większość innych formalizuje się w teorii zbiorów w naturalny sposób. Ale jak już zaczynamy się posługiwać pojęciem zbioru to pojawia się pytanie jakie są reguły manipulowania zbiorów, i jakie rozumowania dotyczące zbiorów są poprawne. Ten drugi nurt jest motywowany koniecznością zrozumienia *istoty* pojęcia zbioru (więc bardziej filozoficznie zorientowany). Ten kierunek, acz wspomniany w książce, jest w niej właściwie pominięty. Że zaś recenzent wywodzi się z tej drugiej orientacji której źródła znajdują się w pracach Gödla i Mostowskiego, nieco to razi i pewne myśli krytyczne nie mogą być pominięte w tej recenzji. O tym jednak na końcu.

Recenzowana książka składa się z czterech części mniej-więcej tej samej objętości. Pierwsza z nich to "Elementarna Teoria Mnogości". Jest to standardowy przegląd podstawowych faktów teorio-mnogościowych. Swego czasu (ale było to 30 lat temu) wykład p.t. "Wstęp do Matematyki Współczesnej" (rozwinięty przez p. Profesor Rasiową) pokrywał materiał owej pierwszej części, zawierał on też elementy logiki która, w zasadzie, nie występuje w recenzowanej książce.

Druga część książki, "Aksjomatyczna Teoria Mnogości" zawiera bardziej zaawansowane zagadnienia teorii mnogosci, w szczególności teorię liczb porządkowych i kardynalnych. Tu jednak autorzy (w rozdziale 9ym) idą znacznie dalej niż porównywalne części KM, dyskutując twierdzenia podzialowe (poczynając od Twierdzenia Ramseya a nastepnie szereg jego uogólnień), stacjonarne podzbiory zbioru porządkowych liczb przeliczalnych oraz tzw. Aksjomat Martina (postulujący istnienie filtrów w pewnych zbiorach uporządkowanych).

Trzecia część książki "Klasyczne konstrukcje teorii mnogości" składa się z sześciu rozdziałów ktore, acz bez wątpienia motywowana przez badania teorio-mnogościowe, należą do innych działów Matematyki (przynajmniej w opinii recenzenta). Rozdział 10y wprowadza kraty, przedmiot klasycznie zaliczany do Algebry Uniwersalnej. Rozdział 11y zajmuje się topologiami (czyniąc w ten sposób ukłon w stronę koncepcji teorii mnogości reprezentowanej przez Kuratowskiego). Rozdział 12y poświęcony jest drzewom, zbiorom (częściowo) uporządkowanym w ktorych odcinki początkowe są dobrze uporządkowane Tematyka ta była intensywnie badana w latach 70ych i ma znaczne zastosowania w Topologii. Rozdział 13y poświęcony jest miarom na σ-algebrach. Dziedzina ta choć należy do szeroko pojętej teorii funkcji rzeczywistych i probabilistyki, ma też swoje metamatematyczne konsekwencje (n.p. istnienie liczb kardynalnych mierzalnych implikuje negację aksjomatu konstruowalności). Rozdział 14y, "Algebry Boole'a" jest, znowu, częścią Alebry Uniwersalnej, a rozdział 15, Teoria Ramseya" należy do pogranicza Kombinatoryki i Algebry. Mimo że, jak wspominam powyżej, są to wszystko zagadnienia niejako poza głównym nurtem badań teoriomnogościowych, część ta napewno przyda się edukacji każdego doktorantamatematyka.

Krótsza od pozostałych część czwarta "Wokół pewnika wyboru" reprezentuje sobą pewną niekonsekwencję. Z jednej strony autorzy zakładają od początku Pewnik Wyboru, z drugiej, w owej ostatniej części badają zdania równowazne pewnikowi wyboru (na gruncie Teorii Mnogości) jeśli nie jest on zakładany. Jest to, moim zdaniem niejako schizofreniczne. Ale część ta zawiera też podstawowe fakty dotyczące Aksjomatu Determinacji Mycielskiego i Steinhausai, po ponad 50 latach nową prezentację "paradoksalnego rozkładu kuli" Banacha i Tarskiego. Pierwsze wydanie KM zawierało ten dowód, ale późniejsze już nie.

Z opisu zawartości recenzowanej książki powinien czytelnik wnioskować że jest to szeroko zakrojona i dobrze wyegzekwowana monografia Teorii Mnogości. Ale trzeba też dodać że aspekty metamatematyczne teorii mnogości nie są w zasadzie potraktowane w żaden sposób. Część trzecia przygotowuje czytelnika do zrozumienia pojęcia forsingu i, ogólniej modelu boolowskiego teorii mnogości. Od owej części trzeciej do dowod"u niezależności (powiedzmy) hipotezy kontinuum, już tylko jeden krok. Szanuję prawo autorów do wyboru materiału i brak tego dowodu (znajdującego się, na przykład w kiążce Jecha "Set Theory") jest usprawiedliwiony ogólnym podejściem autorów (w stylu Kuratowskiego, nie zaś Mostowskiego). W skiążce z tak silnym naciskiem na zastosowania topologiczne widoczny jest brak informacji o zbiorach analitycznych, koanalitycznych i PCA (obecnych tak w KM jak i w monografii Guzickiego i Zbierskiego). Są to działy teorii mnogości o klasycznych zastosowaniach w Topologii i Analizie.

Kwestie efektywności konstrukcji teoriomnogościowych są więc całkowicie pominięte. Autorzy zdają sobie z tego sprawę wspominając że Gödel udowodnił niesprzeczność uogólnionej hipotezy continuum i pewnika wyboru, To jest właśnie przyczyna dla której pewnik wyboru przestał być kontrowersyjny. Z jednej strony wiemy że nie prowadzi on do sprzeczności (o ile sama teoria mnogości - bez owego pewnika jest niesprzeczna) z drugiej jest to narzędzie bez którego matematykom trudno żyć.

Autorzy używają w niektórych miejscach pojęcia "klasy" Wyjaśnienia na temat tego czym klasy są zdały mi się głęboko niewystarczające (ale może to skutek tego ze owe 30 lat temu było to jedno z moich zainteresowań.) Pojawia się klasa wszystkich zbiorów V i klasa liczb porządkowych *Ord*. Czym są te obiekty (bo wiemy że nie są zbiorami) nie jest jasnym. Jakie są reguły manipulowania klasami też nie jest oczywistym.

p. Profesor Mostowski bez wątpienia zarzuciłby autorom niekonsekwentne podejście do spolszczania niektórych terminów, a innych nie. Oto przykłady: autorzy mówią o "forsingu" a nie o "wymuszaniu" o "tranzytywności" a nie o "przechodniości". Z drugiej zas strony pojawiają się skróty od wyrażeń angielskich "Cub" to "closed unbounded set" (domknięty i nieograniczony zbiór liczb porządkowych). ale nie mówiąc dlaczego właśnie to jest skracane. Oczywiście pokolenia wcześniejsze tłumaczyły, czasem, za wiele na polski (n.p. p. Profesor Kuratowski używał terminów takich jak *krdl* zamiast *inf*).

Ksiażka jest sczytana bardzo dokładnie, prawie jak by ją czytał Profesor Kuratowski (który był najlepszym korektorem wśród matematyków.)

Lemat Banacha (str. 28) to twierdzenie Knastera-Tarskiego (Knastra jak by powiedział p. Profesor Steinhaus) o fixpunkcie. Nieco zdziwił mnie wybór dowodu twierdzenia Halesa-Jewetta (p. 380 i dalej). Jest to argument nieefektywny, dowód Shelaha jest bardziej efektywny.

Razi mnie nieco używanie imion (obok nazwisk). Moi nauczyciele polskiego (ale bylo to

50 lat temu) byliby niezadowoleni, szczególnie że imiona te pojawiają się też w indeksie). Oczywiście każdy język naturalny ewoluuje, i moje poczucie dzisiejszego polskiego może być całkowicie błedne.

Czas na konkluzje: Moje zarzuty to drobnostki. Recenzowana książka ma szansę być klasykiem polskiej literatury matematycznej (w czwartym wydaniu, prawdopodobnie). Jest ona świadectwem tego że mimo całkowitego rozpadu warszawskich badań teoriomnogościowych (do którego, niestety, osobiście przyłożyłem ręki), dziedzina ta w Polsce nie zanika. Bardzo za to jestem autorom wdzięczny.